Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Богданов А.Ю.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
## «Дискретная математика и математическая логика»

для студентов бакалавриата факультета математики, информационных и авиационных технологий направлений 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов бакалавриата ФМИАТ по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» / составитель: Богданов А.Ю. – Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов очной формы обучения по направлениям бакалавриата 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» для самостоятельной работы по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика». В пособии представлена литература по дисциплине, основные темы курса и рекомендации по самостоятельному изучению теоретического и практического материала.

Методические указания будут полезны студентам при подготовке к лекционным и практическим занятиям, а также к экзамену по данной дисциплине.

*Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым Советом Факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол номер 2/19 от 19 марта 2019 г.).*

## 1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**основная:**

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979.
2. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf
3. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf
4. Михеева Е.А. Конспекты лекций по курсу «Дискретная математика» (первый семестр). Электронное учебное пособие. – ОРЭИ УлГУ, 2012.- **URL:** http://edu.ulsu.ru/cources/484/interface/
5. Михеева Е.А. Конспекты лекций по курсу «Дискретная математика» (второй семестр). Электронное учебное пособие. – ОРЭИ УлГУ, 2016.- **URL^** http://edu.ulsu.ru/cources/736/interface/

**дополнительная:**

1. Гаврилов Г. П. Сборник задач по дискретной математике : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Гаврилов Гарий Петрович, А. А. Сапоженко. - Москва : Наука, 1977.
2. Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Гаврилов Гарий Петрович, А. А. Сапоженко. - 3-е изд., перераб. - Москва : Физматлит, 2006.
3. Гаврилов Г.П., Задачи и упражнения по дискретной математике : Учеб. пособие. / Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. - 3-е изд., перераб. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 416 с. - ISBN 978-5-9221-0477-7 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922104777.html

**учебно-методическая:**

1. Михеева Е.А. Индивидуальные задания для математического практикума на ЭВМ по «Дискретной математике». Методические указания. – Ульяновск, фМГУ, 1995.- **URL^** ftp://10.2.96.134/Text/miheeva.pdf
2. Михеева Е.А. Дискретная математика: учебно-методическое пособие.- Ульяновск: УлГУ, 2008.- **URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva4.pdf
3. Михеева Е.А. Разделы дискретной математики: электронный учебный курс.- ГОУ ВПО УлГУ, 2010. - **URL:** http://edu.ulsu.ru/cources/236/interface/

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### 1) Раздел 1. Элементы теории множеств

**Тема 1.** *Множества и операции над ними. Алгебра множеств. Разбиение множества на подмножества. Кортежи и декартово произведение множеств.*
С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 8-12.

**Тема 2.** *Отображение множеств. Отношения. Свойства бинарных отношений. Алгебра подмножеств.*
С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 13-15.

### Контрольные вопросы по разделу

1. Какие множества называются равными?
2. Какие множества называются равномощными?
3. Привести пример конечного и бесконечного (счётного и несчётного) множеств.
4. Что такое симметрическая разность множеств?
5. Какую роль выполняет универсальное множество U в алгебре множеств?
6. Сколько всего подмножеств у конечного множества из n элементов?
7. Важен ли порядок элементов в кортеже и в декартовом произведении?
8. Дать определение бинарного отношения.
9. Следует ли из бинарного отношения "симметричность" отношение "рефлексивность"?
10. Выписать булеан для множества очков на игральной кости.

### Задачи для самостоятельной работы по разделу

**1.** Для множества $M = \{a, b, c, d\}$ построено множество $B(M)$, т.е. булеан множества $M$ (множество всех подмножеств множества $M$). Из этого булеана удалили пустое множество и все одноэлементные множества. Полученное в результате множество обозначили символом $E$ и построили его булеан $B(E)$.

Тогда какому числу равно число элементов множества B(E)?

**2.** Даны:

1) множества $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и $B = \{1,2,3,4,5,6\}$;

2) отображения $\varphi$: $A \longrightarrow B$ и $\psi$: $B \longrightarrow A$, причём отображения определяются следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 6 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

и

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда композиция $\psi \circ \varphi$: $B \longrightarrow B$ (сначала $\psi$, а потом $\varphi$) отображений $\psi$ и $\varphi$ есть отображение …

**3.** Даны множества $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ и отображение $\varphi$: $A$ —> $B$, представленное в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ d & f & a & e & f & e & e & c & d & e \end{pmatrix}.$$

Пусть $A_1 \subseteq A$ – множество простых чисел множества $A$, тогда образ $\varphi(A_1)$ есть …

**4.** Дано множество

$A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Пусть $E = B(A)$ – булеан множества $A$, т.е. множество всех подмножеств $A$.

Тогда истинным будет соотношение …

a) $a \in E$

b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq E$

c) $\{a\} \subseteq E$

d) $A \in E$

**5.** Даны множества $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ и отображение $\varphi$: $A$ —>$B$, представленное в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ d & f & a & e & f & e & e & c & d & e \end{pmatrix}.$$

Пусть $B_1 = \{a,e,f\}$.

Тогда прообраз $\varphi^{-1}(B_1)$ множества $B_1$ есть множество …

**6.** Число 1,5 принадлежит множеству …

a) $C = \{c \mid c \in \mathbf{N}, 1 \le c \le 5\}$

b) $A = \{a \mid a \in \mathbf{Q}, a < 1\}$

c) $B = \{b \mid b \in \mathbf{Z}, -2 \le b < 2\}$

d) $D = \{d \mid d \in \mathbf{R}, -1 \le d \le 1{,}6\}$

**7.** Число 5 принадлежит множеству …

a) $C = \{c \mid c \in \mathbf{Z}, -2 \le c \le 4\}$

b) $B = \{b \mid b \in \mathbf{R}, -3 \le b \le 3{,}8\}$

c) $D = \{d \mid d \in \mathbf{N}, 1 \le d < 7\}$

d) $A = \{a \mid a \in \mathbf{Q}, a < 3\}$

**8.** Число –1,5 принадлежит множеству …

a) $C = \{c \mid c \in \mathbf{Q}, c < 2\}$

b) $B = \{b \mid b \in \mathbf{N}, 1 \le b \le 6\}$

c) $D = \{d \mid d \in \mathbf{Z}, -1 \le d < 3\}$

d) $A = \{a \mid a \in \mathbf{R}, -1 \le a \le 2{,}4\}$

**9.** Число -4 принадлежит множеству …

a) $B = \{b \mid b \in \mathbf{Z}, -4 \le b \le 5\}$

b) $C = \{c \mid c \in \mathbf{R}, -3 \le c \le 4{,}6\}$

c) $D = \{d \mid d \in \mathbf{Q}, d < -4\}$

d) $A = \{a \mid a \in \mathbf{N}, 2 < a \le 9\}$

**10.** Даны множества $A = \{a,x\}$ и $B = \{2,3,4\}$. Тогда декартовым (прямым) произведением $A \times B$ является …

**11.** Даны множества $A = \{a,x\}$ и $B = \{2,3,4\}$. Тогда декартовым произведением $B \times A$ является …

**12.** Образом отрезка [–3;2] при отображении $f = 11x - 1$ является…
**13.** Образом отрезка [–4;4] при отображении $f = 10x - 1$ является…
**14.** Укажите соответствие между примером множества и способом его задания:
1. $x = (3, 10) \setminus [5, 8]$
2. $x = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
3. $x_n = x_{n-1} + n \cdot x_{n-2},\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$
4. $x_n = 5 \cdot 2^n$

*a)* с помощью теоретико-множественных операций
*b)* перечислением
*c)* рекуррентное
*d)* явное

**15.** Укажите соответствие между примером множества и способом его задания:
1. $\{x \in \mathbf{N} : (x^2 + 1)$ *делится на 5 без остатка*$\}$
2. $x_n = 4n^2 - 1$
3. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2},\ \ x_1 = 5,\ x_2 = 3$
4. $x = [-3, 5] \cup (7, 10)$

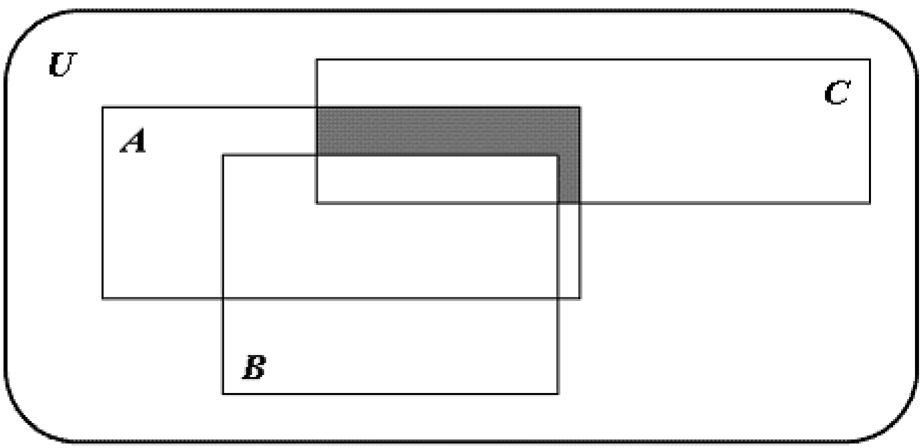
*a)* явное
*b)* рекуррентное
*c)* с помощью теоретико-множественных операций
*d)* характеристическим свойством

**16.** Бинарное отношение $R = \{ <x, y>: x \in \mathbf{R},\ Y \in \mathbf{R},\ x + y \geq 1\}$ обладает свойствами:
*a)* антисимметричности и транзитивности
*b)* антирефлексивности и транзитивности
*c)* рефлексивности и симметричности
*d)* антирефлексивности и антисимметричности

**17.** Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа $N$ на $60$ является его делимость
*a)* на 3, на 4 и на 5
*b)* на 6 и на 10
*c)* на 2 и на 30
*d)* на 2, на 10 и на 3

**18.**

**На рисунке показаны следующие множества: основное (универсальное) множество $U$ и его подмножества $A$, $B$ и $C$ (соответствующие прямоугольные области на плоскости).**




**Тогда закрашенное подмножество есть …**

$a)\ (A \cap B) \setminus C$

$b)\ A \cap B \cap C$

$c)\ C \cap (\overline{A \cup B})$

$d)\ (A \cap C) \setminus B$

**Раздел 2. Элементы комбинаторики**

**Тема 3.** *Предмет комбинаторики. Различные комбинаторные соотношения.Свойства биномиальных коэффициентов. Биномиальная теорема. Полиномиальная теорема. Принцип включения и исключения. Формула решета.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 171-188.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1-Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 20-29.

**Тема 4.** *Производящие функции. Производящие функции числа основных комбинаторных объектов.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 188-202.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1-Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 29-34.

**Контрольные вопросы по разделу**

1. В каких случаях в комбинаторных задачах используют термин "размещение", а в каких "сочетание"?
2. Приведите два вида записи биномиальных коэффициентов, каков их комбинаторный смысл?
3. Как выражаются $D_n^k$ через биномиальные коэффициенты?
4. Записать формулу Стирлинга для асимптотической аппроксимации n!
5. Проиллюстрировать принцип включения и исключения для двух и трёх множеств с помощью диаграммы Эйлера-Венна.
6. В чём состоит идея доказательства формулы решета?
7. В чём состоит связь формального степенного ряда для производящей функции из комбинаторики и формулы Маклорена из математического анализа?
8. Как вычисляются сумма и произведение производящих функций?
9. Как вычислить производную от производящей функции?
10. Вычислить производящую функцию для последовательности биномиальных коэффициентов.
11. Что такое экспоненциальная производящая функция?

**Задачи для самостоятельной работы по разделу**

**1.** Найти сумму корней уравнения $A_x^5 = 18 \cdot A_{x-2}^4$

**2.** Какой коэффициент имеет слагаемое в разложении выражения $(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a})^{20}$, содержащее одночлен $a^7$?

**3**. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$?

**4.** Сколько различных «слов» можно составить из слова «*карта*» (под словом понимается произвольное сочетание букв)?

**5.** На десяти одинаковых карточках написаны буквы *м, а, т, е, м, а, т, и, к, а*. Найти число способов получить слово «*математика*» при случайном выкладывании карточек в ряд.

**6.** Найдите количество слов длины 6 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которых буква $a$ встречается на один раз больше буквы $b$.

**7.** Найдите количество слов длины 7 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которых буквы $a$ и $b$ встречаются одинаковое количество раз.

**8.** Найдите количество слов длины 6 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которых буква $a$ встречается столько же раз, сколько буквы $b$ и $c$ вместе взятые.

**9.** Найдите количество слов длины 8 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которых буква $a$ встречается дважды, а буква $b$ – не менее трех раз.

**10.** Найдите количество слов длины 5 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буква $a$ входит не более двух раз.

**11.** Найдите количество слов длины 8 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буква $a$ входит не более двух раз.

**12.** Найдите количество слов длины 8 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буква $a$ входит не менее 3 раз и не более 5 раз.

**13.** Найдите количество слов длины 6 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буква $a$ входит не менее 3 раз.

**14.** Найдите количество слов длины 7 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буква $a$ входит не более 2 раз, а суммарное число вхождений букв $b$, $c$ равно 3.

**15.** Найдите количество слов длины 7 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буквы $a,b,c$ входят одинаковое количество раз.

## Раздел 3. Алгебра логики

**Тема 5.** *Булевы функции. Формулы. Сопоставление формулам над множеством В функций. Свойства элементарных функций. Разложение булевых функций. Совершенная ДНФ, совершенная КНФ. Полные системы, примеры полных систем. Полиномы Жегалкина. Единственность представления булевых функций полиномами Жегалкина. Методы построения полиномов.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 9-25.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1-

Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 36-50.

**Тема 6.** *Замыкание. Свойства операции замыкания. Замкнутые классы. Классы $T_0$, $T_1$ и их свойства. Линейные функции, их свойства. Принцип двойственности. Самодвойственные функции, их свойства. Лемма о несамодвойственной функции. Монотонные функции, их свойства. Лемма о немонотонной функции. Теорема о полноте в $P_2$. Предполные классы. Возможность выделить из любой полной системы полную систему, состоящую из не более чем четырёх функций. Представление о результатах Поста.*
С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 25-42.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 50-60.

## Контрольные вопросы по разделу

1. Сколько всего булевых функций n переменных?
2. Как на практике отличить существенную переменную от фиктивной?
3. Как сравнивать функции с разными переменными?
4. Что называется формулой над некоторым классом функций из $P_2$?
5. Какие формулы называются эквивалентными?
6. Сформулируйте и выпишите правило поглощения.
7. Сформулируйте и выпишите правило склеивания.
8. Выпишите 3 разложения булевой функции n переменных по первой переменной через дизъюнкцию, сумму по модулю 2 и конъюнкцию.
9. Дайте определение СДНФ и СКНФ.
10. Приведите примеры полных систем, состоящих из четырёх, трёх, двух, одной функций (если это возможно).
11. Какие булевы функции можно представить полиномом Жегалкина?
12. Единственно ли представление булевой функции полиномом Жегалкина (с точностью до фиктивных переменных)?
13. Приведите примеры трёх различных методов построения полиномов Жегалкина. Какой метод вы предпочитаете на практике?
14. Приведите примеры замкнутого и незамкнутого классов функций из $P_2$.
15. Обоснуйте замкнутость классов $T_0$ и $T_1$.
16. Приведите примеры линейных и нелинейных функций. Является ли класс L замкнутым?
17. Какая функция называется двойственной? Может ли функция совпасть со своей двойственной?
18. Является ли замкнутым класс S?
19. Приведите пример монотонной и немонотонной булевой функции.
20. Является ли доказательство замкнутости класса M одним из самых коротких для предполных классов в $P_2$?
21. Сколько всего предполных классов существует в $P_2$?
22. Как на практике можно проверить полноту системы булевых функций, используя свойства предполных классов?
23. До какого гарантированного числа функций можно сократить любую полную систему функций в $P_2$?
24. Что такое базис замкнутого класса булевых функций?

25. Сформулируйте два важнейших результата Поста о базисе замкнутых классов в $P_2$. Как вы думаете, справедливы ли эти результаты для функций k-значной логики, где k=3, 4,...?

**Задачи для самостоятельной работы по разделу**

В приведенных ниже заданиях формула, определяющая булеву функцию f (в зависимости от номера варианта), представлена в таблице 1.

**1.** Функцию f задать: а) с помощью таблицы; б) графически с использованием структуры.

**2.** С помощью эквивалентных преобразований упростить формулу, определяющую функцию f.

**3.** Построить функцию, двойственную к функции f.

**4.** Представить функцию f: а) в виде СДНФ; б) в виде СКНФ.

**5.** Определить, каким из классов T0, T1, S, L и M принадлежит функция f.

**6.** Выяснить, является ли данная функция шефферовой. Если нет, то какую одну функцию надо добавить к ней, чтобы получить полную систему. Единственным ли образом это можно сделать?

*Таблица 1*

| Номер варианта | Формула, определяющая функцию |
|---|---|
| 1 | (((x1+x4)→(x2 ↓ x3))+((x1~x4)→x3∨x1·¬x2) |
| 2 | ((x1↑x2)→(x2 ~ x4))→((x3 +¬x4) ∨¬x1·x3) |
| 3 | ((x1+x3)~(x2 →x4))→((x1+x3)∨(x2↓¬x4)) |
| 4 | ((((x1∨x2·x3)~(¬x1 ·x4))→x1)+(x2↑x3))→x1·¬x3 |
| 5 | (((x1 ~x2)→(x3+x4))→(( ¬x1·x3)↑x4))∨x3 |
| 6 | ((x1+(x2↓x3))→(¬x4 ~x1))→(¬x1∨(x2+(x3·x4))) |
| 7 | ((((x1→x2)→x3)+x4)↓(x1·¬x3∨x2·x4))∨x1·x4 |
| 8 | (((¬x1·x3)+(x2∨x4))→(x1·x4))↓ (¬x3·x2 ∨x3) |
| 9 | ((x1~((x2·¬x4)+x3))→x1·¬x2)→((x2↑¬x3)∨x4) |
| 10 | ((x1→(¬x3~x4))↓(x2+(x3·¬x4)))→(x1·x3∨x4) |

**7.** Выясните, полна ли система функций $\{\bar{x}, x(\bar{y} \to z) \vee yz\}$.

**8.** Выясните, полна ли система функций $\{x \oplus y, (x \sim y)z \vee (x \oplus y)\bar{z}\}$.

**9.** Выясните, полна ли система функций $\{ x \vee y, x(y \oplus z) \oplus (y \mid z) \}$.

**10.** Выясните, полна ли система функций $\{ 0,1, (x \vee y \vee (x \oplus y))z \}$.

**11.** Выясните, полна ли система функций $\{ \bar{x}, xy \vee \bar{z}(x \oplus y) \}$.

**12.** Выясните, полна ли система функций $\{ x \sim y, (x \to y)(y \to x) \oplus z \}$.

## Раздел 4. Синтез управляющих систем

**Тема 7.** *Задача синтеза управляющих систем. Определение схем их функциональных* *элементов. Основные понятия и определения СФЭ, функции, реализуемые схемой. Сложность схемы, функция Шеннона.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 336-351.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 62-66.

**Тема 8.** *Возможность реализации любой функции алгебры логики СФЭ. Простейший метод синтеза СФЭ, основанный на моделировании СДНФ. Метод Шеннона. Асимптотически наилучший метод О.Б. Лупанова.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 351-363.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL^** ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 66-75.

## Контрольные вопросы по разделу

1. Назовите основные классы дискретных управляющих систем.
2. Математической моделью каких реальных устройств являются схемы из функциональных элементов?
3. В чём состоит задача синтеза управляющих систем?
4. Дайте определение логической сети.
5. Дайте определение схемы из функциональных элементов как некоторой логической сети (по пунктам 1,2,3).
6. Как определяются функции, реализуемые СФЭ?
7. Как вычисляется сложность L(S) СФЭ?
8. В каком стандартном базисе обычно рассматриваются СФЭ?
9. Как вычисляется функция Шеннона L(n) на основе значений L(f) и L(S).
10. Какие функции алгебры логики могут быть реализованы схемами из функциональных элементов?
11. Приведите пример простейшего метода синтеза СФЭ (на основе моделирования СДНФ и т.п.)
12. В чём состоит преимущество метода Шеннона по сравнению с простейшими методами синтеза СФЭ?
13. Какую асимптотическую сложность имеет асимптотически наилучший метод Лупанова?
14. Каким выражением можно описать асимптотическое поведение функции Шеннона L(n) (когда оценки снизу и сверху совпадают)?

## Задачи для самостоятельной работы по разделу

**1.** Для заданной функции f($x_1, x_2, x_3$) построить СФЭ в стандартном базисе сложности, не превосходящей m:

1) f($x_1, x_2, x_3$) = $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3, m = 3;$

2) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3, m = 5;$

3) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3, m = 4;$

4) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3, m = 4;$

5) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3, m = 2;$

6) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3, m = 4;$

7) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3, m = 3.$

**2.** Для заданной функции f( $x_1, x_2, x_3$ ) построить СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности:

1) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (00101111);

2) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (11100100);

3) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (11110100);

4) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (01010011);

5) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (01010111);

6) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (10110000);

7) f( $x_1, x_2, x_3$ ) = (11101111).

**3.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_0(0,1,3)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**4.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_0(3,4,6,7)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**5.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_0(4,6,7)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**6.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_1(1,3,6,7)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**7.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_1(1,3,5,6,7)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**8.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_1(0,2,3)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**9.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = $\sum_0(3)$ СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**10.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = (01111110) СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**11.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = (10000001) СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

**12.** Реализовать булеву функцию f(x,y,z) = (11000011) СФЭ в стандартном базисе минимальной сложности.

## Раздел 5. Теория графов

**Тема 9.** *Элементы теории графов, основные понятия и определения. Оценка числа Способы задания графа. Некоторые соотношения в графе. Перечисление графов. Оценка числа неизоморфных графов с p вершинами.*
С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 222-227.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 77-84.

**Тема 10.** *Укладки графов. Укладка графов в трехмерном пространстве. Планарность. Формула Эйлера для плоских графов, следствия. Операция подразделения ребра. Гомеоморфность графов, теорема Понтрягина-Куратовского. Деревья и их свойства. Операции над деревьями. Оценка числа неизоморфных корневых деревьев на p вершинах.*
С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / Яблонский Сергей Всеволодович. - Москва : Наука, 1979. Стр. 227-245.
2. Михеева, Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 1- Ульяновск: УлГУ, 2013. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva14.pdf Стр. 85-95.

### Контрольные вопросы по разделу

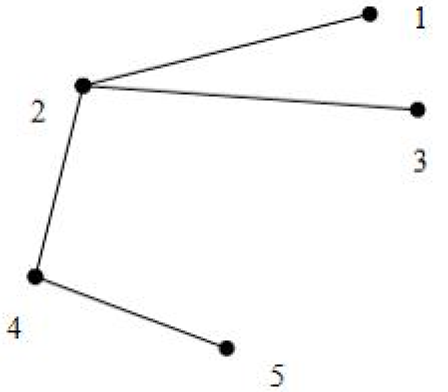
1. Какие графы называются неориентированными и ориентированными?
2. Что такое матрица смежности?
3. Что такое матрица инцидентности?
4. Как изобразить граф с помощью диаграммы?
5. Что такое маршрут, цепь, цикл?
6. Какой граф называется двудольным?
7. Какой граф называется связным?
8. Какие графы называются изоморфными?
9. Как построить полный граф?
10. Всякий ли граф можно уложить в трёхмерном пространстве?
11. Выпишите и прокомментируйте формулу Эйлера для плоского связного графа.
12. Планарен ли граф $K_5$?
13. Планарен ли граф $K_{3,3}$?
14. Какие графы называются гомеоморфными?
15. Сколько петель и/или кратных рёбер может содержать дерево?
16. Верно ли, что любые две вершины в дереве можно соединить единственной цепью?
17. Как осуществить кодирование с помощью деревьев?
18. Однозначно ли можно восстановить дерево по коду?

### Задачи для самостоятельной работы по разделу

**1.** Дан неориентированный граф (неограф) G = (V,R), где V = {1,2,3,4,5,6,7} – множество вершин неографа (вершины помечены натуральными числами), R = {(1,2),(2,3),(1,6),(2,4),(2,5),(3,4),(2,6)} – множество ребер неографа. Какой вид имеет матрица смежностей данного неориентированного графа?

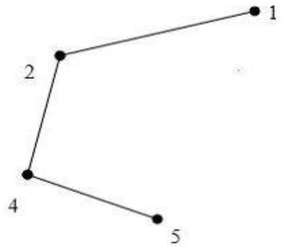
**2.**

**Подграфом графа G, изображенного на рисунке:**

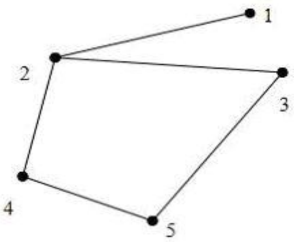



**является граф …**

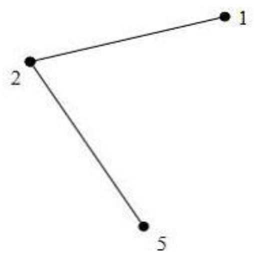
**1)**




**2)**




**3)**




**3.** Чему равно число полных путей в ориентированном графе, представленном следующей матрицей смежности?

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 1 |

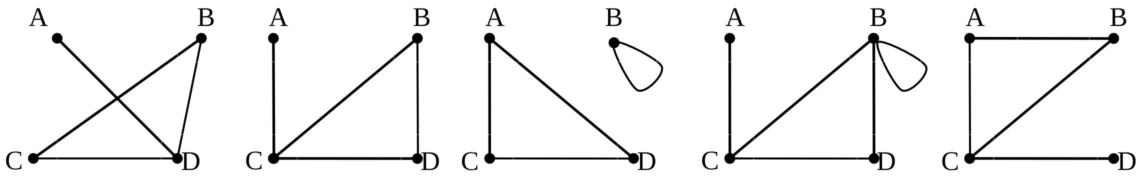
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 |

**4.** Неориентированные графы имеют множество вершин {A,B,C,D}. Множества их ребер заданы отношением инцидентности: каждое ребро представлено как пара вершин. Поставьте в соответствие каждому графу его изображение.

1) {(A,C),(B,C),(C,D),(B,D)};

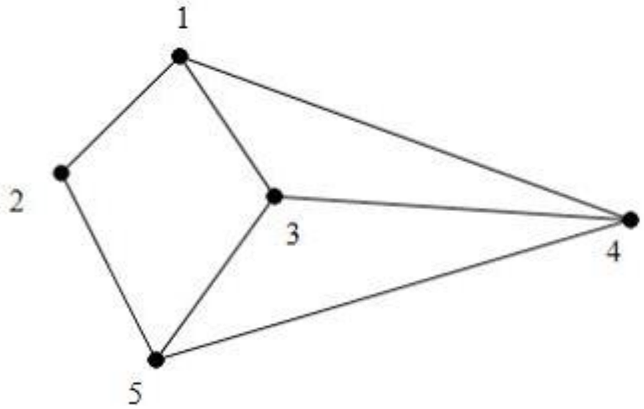
2) {(A,B),(A,C),(B,C),(C,D)};

3) {(A,C),(B,C),(B,D),(B,B)};




*а* *б* *в* *г* *д*

**5.** Какой маршрут является циклом на графе G, изображенном на рисунке:



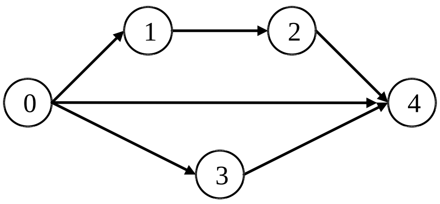

1) 12543;

2) 12541;

3) 145341;

4) 1231.

**6.** Для ориентированного графа, изображенного на рисунке,




полный путь имеет вид:

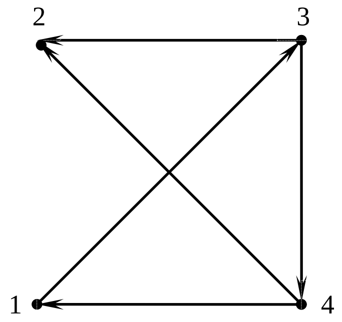
a) *L*: 1→2→4

b) *L*: 0→1→2→3→4

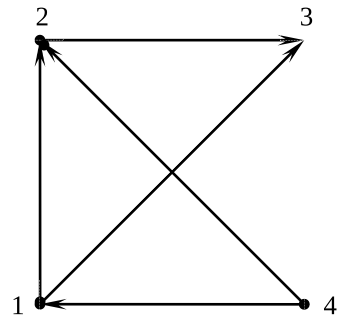
c) *L*: 0→3→2→4

d) *L*: 0→4

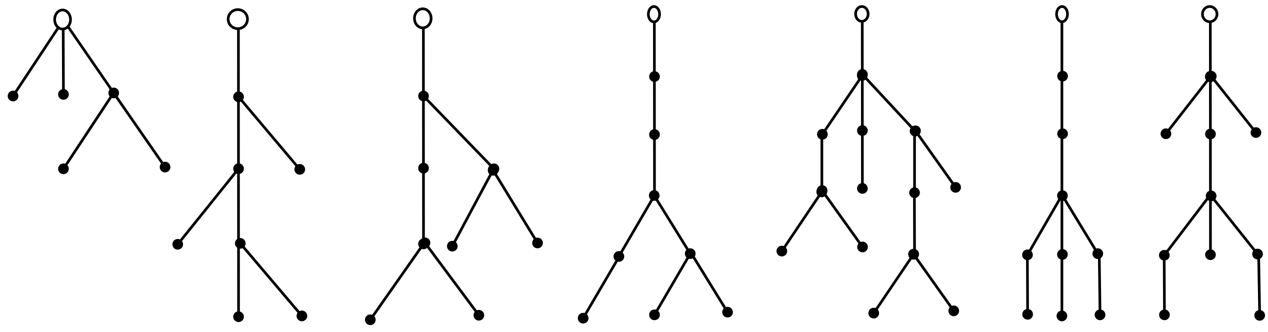
**7.** Чему равна матрица смежности и инцидентности следующего ориентированного графа:




**8.** Чему равна матрица смежности и инцидентности следующего ориентированного графа:




**9.** Построить коды плоских корневых деревьев, изображенных ниже:




**10.** Построить плоское корневое дерево по его коду $\tilde{\alpha}$:

1) $\tilde{\alpha}$ = 0010100111

2) $\tilde{\alpha}$ = 00110101000111

3) $\tilde{\alpha}$ = 0000010011011111

4) $\tilde{\alpha}$ = 01001000110111

5) $\tilde{\alpha}$ = 00100010110111;

6) $\tilde{\alpha}$ = 00010111010000101111

**11.** По вектору $\tilde{\alpha}$ установить, является ли он кодом какого-либо плоского дерева:

1) $\tilde{\alpha} = 001011$

2) $\tilde{\alpha} = 0110$

3) $\tilde{\alpha} = 001001$

4) $\tilde{\alpha} = 010011$

5) $\tilde{\alpha} = 00111001$

6) $\tilde{\alpha} = 0001100111$

**12.** Множество векторов A разбить на классы так, чтобы каждый класс состоял из кодов попарно изоморфных плоских корневых деревьев.

1) A = {$\tilde{\alpha}_1 = 0100101101$, $\tilde{\alpha}_2 = 0101000111$, $\tilde{\alpha}_3 = 0001110101$, $\tilde{\alpha}_4 = 0101001011$, $\tilde{\alpha}_5 = 0100011101$}.

2) A = {$\tilde{\alpha}_1 = 0100010110111$, $\tilde{\alpha}_2 = 000110011101$, $\tilde{\alpha}_3 = 001001011101$, $\tilde{\alpha}_4 = 010010010111$, $\tilde{\alpha}_5 = 010001100111$}

3) A = {$\tilde{\alpha}_1 = 0011010011$, $\tilde{\alpha}_2 = 0100110011$, $\tilde{\alpha}_3 = 0010110101$, $\tilde{\alpha}_4 = 0100101101$, $\tilde{\alpha}_5 = 0011001101$}.

## Раздел 6. Элементы математической логики

**Тема 11.** *Объекты изучения математической логики. Исчисление высказываний (ИВ). Язык ИВ. Аксиомы ИВ. Правила вывода в ИВ. Формулы алгебры высказываний. Непротиворечивость ИВ. Полнота ИВ.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf Стр. 7-17.

**Тема 12.** *Предикаты. логические операции над предикатами. Теорема о полноте системы одноместных предикатов, заданных на конечном множестве. Кванторы. Исчисление предикатов (ИП). Формулы ИП. Определение формул. Замена переменных в формулах. Аксиомы ИП. Замена переменного высказывания. Замена переменного предиката.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf Стр. 18-26.

### Контрольные вопросы по разделу

1. Что такое исчисление высказываний с точки зрения формальной логики?
2. Из каких компонент состоит язык исчисления высказываний?
3. Как определяется формула в исчислении высказываний?
4. Каков приоритет операций в исчислении высказываний?
5. Как вычисляется ранг формулы в исчислении высказываний?
6. Сколько аксиом и сколько групп аксиом в исчислении высказываний?

7. В чём заключается правило подстановки в исчислении высказываний?
8. В чём заключается правило заключения в исчислении высказываний?
9. Какая формула называется выводимой в исчислении высказываний?
10. Какая формула алгебры высказываний называется тавтологией?
11. Какая формула алгебры высказываний называется выполнимой?
12. Какая формула алгебры высказываний называется опровержимой?
13. Какая формула алгебры высказываний называется противоречием?
14. Каким образом можно установить соответствие между формулами алгебры высказываний и исчисления высказываний?
15. Какое исчисление называется непротиворечивым и противоречивым?
16. Верно ли, что если формула F выводима, то она тавтология?
17. Верно ли, что исчисление высказываний непротиворечиво?
18. Будет ли всякая тождественно истинная формула алгебры высказываний (тавтология) выводима в исчислении высказываний?
19. Как вы думаете, является ли исчисление высказываний полным в узком смысле, т.е. присоединение к его аксиомам какой-нибудь невыводимой в нём формулы приводит к противоречию?
20. Что называется n-местным предикатом?
21. Какие логические операции можно применять к предикатам?
22. Сформулируйте критерий того, что система одноместных предикатов является полной.
23. Приведите примеры использования квантора общности.
24. Приведите примеры использования квантора существования.
25. Что лежит в основе построения исчисления предикатов?
26. Из каких компонент состоят формулы исчисления предикатов?
27. Что называется элементарными формулами в исчислении предикатов?
28. Какие упрощения существуют в записи формул исчисления предикатов?
29. Нарушение каких условий в формулах исчисления предикатов называется коллизией переменных?
30. Какие формулы можно считать аксиомами исчисления предикатов? Что можно сказать об их связи с аксиомами исчисления высказываний?
31. Сформулируйте два правила образования выводимых формул.
32. Каким образом осуществляется замена переменного высказывания?
33. Каким образом осуществляется замена переменного предиката?

**Задачи для самостоятельной работы по разделу**

1. Пусть высказывание $A \wedge B$ истинно. Каким будет высказывание: $\neg A \to \neg B$ ?
2. Пусть высказывание $A \wedge B$ истинно. Каким будет высказывание: $\neg A \vee \neg B$?
3. Пусть высказывание $A \wedge B$ истинно. Каким будет высказывание: $A \to \neg B$ ?
4. Пусть высказывание $A \vee B$ ложно. Каким будет высказывание: $A \leftrightarrow \neg B$ ?
5. Пусть высказывание $A \vee B$ ложно. Каким будет высказывание: $\neg A \wedge \neg B$ ?
6. Пусть высказывание $A \vee B$ ложно. Каким будет высказывание: $A \to \neg B$ ?
7. Пусть высказывание $A \to B$ ложно. Каким будет высказывание: $A \leftrightarrow \neg B$ ?
8. Пусть высказывание $A \to B$ ложно. Каким будет высказывание: $\neg A \vee B$ ?
9. Пусть высказывание $A \leftrightarrow B$ ложно. Каким будет высказывание: $\neg A \leftrightarrow B$ ?
10. Пусть высказывание $A \leftrightarrow B$ ложно. Каким будет высказывание: $A \leftrightarrow \neg B$ ?
11. Пусть высказывание $A \leftrightarrow B$ ложно. Каким будет высказывание: $A \to \neg B$ ?
12. Пусть высказывание $A \leftrightarrow B$ ложно. Каким будет высказывание: $\neg A \to B$ ?
13. Формулу $A \to B \to (A \wedge B)$ преобразуйте к приведенной форме, которую, если возможно, упростите, т.е. уменьшите число операций.
14. Формулу $A \to B \wedge C \to (\neg B \to \neg A) \to \neg C$ преобразуйте к приведенной форме, которую, если возможно, упростите, т.е. уменьшите число операций.

15. Формулу ($A \leftrightarrow \neg C$) $\rightarrow B \rightarrow$($B \leftrightarrow \neg C$) преобразуйте к приведенной форме, которую, если возможно, упростите, т.е. уменьшите число операций.
16. Формулу ($A \leftrightarrow B$) $\Lambda$ $\neg$($A$ V $\neg B$) преобразуйте к приведенной форме, которую, если возможно, упростите, т.е. уменьшите число операций.
17. Формулу ($A \rightarrow B$) $\Lambda$ ($B \rightarrow \neg A$) $\rightarrow$ (С$\rightarrow A$) преобразуйте к приведенной форме, которую, если возможно, упростите, т.е. уменьшите число операций.
18. Формулу ($A \rightarrow C$) $\leftrightarrow$ ($C \rightarrow B$) преобразуйте к приведенной форме, которую, если возможно, упростите, т.е. уменьшите число операций.
19. Найдите отрицание формулы $A$ $\Lambda$ $C \rightarrow B$ $\Lambda$ $C$, предварительно преобразовав её к приведенной форме.
20. Найдите отрицание формулы $A$ $\Lambda$ $B \leftrightarrow B$ $\Lambda$ $C$, предварительно преобразовав её к приведенной форме.
21. Найдите отрицание формулы $A$ V $B \rightarrow C$ V $A$, предварительно преобразовав её к приведенной форме.
22. Найдите отрицание формулы ($A \rightarrow$ $B$)$\leftrightarrow$($B \rightarrow$ $C$), предварительно преобразовав её к приведенной форме.
23. Найдите отрицание формулы $\neg$($A$ V $B$)$\leftrightarrow$ $\neg$($C$ V $B$), предварительно преобразовав её к приведенной форме.
24. Найдите отрицание формулы ($A \rightarrow$ $\neg B$)$\leftrightarrow$($\neg B \rightarrow$ $C$), предварительно преобразовав её к приведенной форме.
25. Имеются высказывания, обозначенные буквами *A, B* и *C*. Буквы *A* и *C* обозначают истинные высказывания (*A* = И, *C* = И, И есть истина). Буква *B* обозначает ложное высказывание (*B* = Л, Л есть ложь ). Тогда истинным является высказывание ...

    1) $\neg(A\wedge(B\wedge\neg(A\wedge C)))$
    2) $\neg(C\vee A)\vee B$
    3) $C\Rightarrow(A\Rightarrow B)$
    4) $(C\Leftrightarrow A)\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow C)$

26. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ определён предикат $P(x,y)$ своей таблицей истинности (0 - "ложь";1 - "истина").

| x \ y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Тогда таблицей истинности предиката $\forall x P(x, y)$ является...

1)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

2)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

3)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

4)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

27. Дано числовое множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , на котором определены два предиката : $P(x,y)$ - $x$ и $y$ являются простыми числами; $Q(x,y)$ -число $x$ делится без остатка на число $y$. Из этих предикатов сформирован новый предикат $R(x,y)= P(x,y) \to Q(x,y)$. Тогда часть

| $x$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| $R(x,y)$ | | | | | | | |

таблицы истинности предиката $R(x,y)$ имеет вид ...

1)

| $x$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| $R(x,y)$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

2)

| $x$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| $R(x,y)$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

3)

| $x$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| $R(x,y)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

4)

| $x$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| $R(x,y)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

28. Пусть на множестве $A \neq \varnothing$ определен предикат $P(x)$.
Выражение $\forall x P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда ...
1) $P(x)$ является тождественно истинным предикатом
2) $P(x)$ имеет хотя бы одно ложное значение на множестве $A$
3) $P(x)$ является тождественно истинным предикатом
4) $P(x)$ имеет хотя бы одно истинное значение на множестве $A$

29. В логической формуле первой выполняется логическая операция ...
1) дизъюнкция
2) импликация
3) конъюнкция
4) отрицание

30. В цепочке равносильных логических формул
$(A \to B) \vee \neg A =$ _____ $= (\neg A \vee \neg A) \vee B = \neg A \vee B$
пропущена только одна формула ...
1) $\neg(A \vee B) \vee \neg A$
2) $(\neg A \wedge B) \vee \neg A$
3) $\neg(A \wedge B) \vee \neg A$
4) $(\neg A \vee B) \vee \neg A$

31. Теоремой, противоположной для $\overline{C} \to A \wedge \overline{B}$, является…
1) $A \wedge \overline{B} \to \overline{C}$
2) $\overline{C} \to A \wedge \overline{B}$
3) $\overline{A} \vee B \to C$
4) $C \to \overline{A} \vee B$

32. Формулой алгебры высказываний является …

1) $(r \wedge (\overline{u} \to q)) \vee \overline{s}$

2) $r\overline{s} \to (q \vee u)$

3) $r \wedge u \vee \overline{s} \to q$

4) $(r \vee \overline{s}) \to \wedge u \vee q$

33. Формулой алгебры высказываний является…

1) $rf \to (q \vee u)$

2) $(r \wedge (\overline{u} \to q)) \vee f$

3) $(r \vee f) \to \wedge u \vee q$

4) $r \wedge u \vee f \to q$

34. Дано множество $M = \{a; b\}$. Предикат $P\{x; y\}$, где $x, y \in M$ , задан таблицей.

| $x$ | $y$ | $P(x; y)$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | 0 |
| $a$ | $b$ | 1 |
| $b$ | $a$ | 1 |
| $b$ | $b$ | 1 |

Определить значение истинности высказываний:

а) $\forall x\ P(x; a)$;

б) $\exists x\ P(x, a)$;

35. Записать в форме высказываний:

а) Все слушатели данной группы – москвичи;

б) Все слушатели в данной группе или москвичи, или из Подмосковья.

36. $S(x, y, z)$ и $\Pi(x, y, z)$ - предикаты сложения ($z$ является суммой $x$ и $y$) и умножения ($z$ является произведением $x$ и $y$), рассматриваемые на множестве $Z$ всех целых чисел и на множестве $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$ целых неотрицательных чисел. Какой смысл имеют следующие формулы, и на каком множестве *(* $Z$ или $\mathrm{N}_0$*)* они истинны?

а) $\exists y\ \ \forall x\ \ S(x; y; z)$*;*

б) $\forall z\ \ \forall x\ \ \exists y\ \ \Pi(x; y; z)$.

37. Укажите правильную запись высказывания:

«***любое рациональное число не больше самого себя***»

a) $\forall x \in Q,\ \exists x\ x \in Q\ (x \geqq x)$;

b) $\forall x \in Q\ \ (x \leqq x)$;

c) $\exists x\ \in Q,\ \forall x \in Q\ (x \leqq x)$;

d) $\exists x\ \in Q\ \ (x \leqq x)$;

38. Укажите правильную запись высказывания:

«***всякое действительное число не меньше самого себя***»

a) $\exists x\ \in R\ (x \geqq x)$;

b) $\forall x \in R,\ \exists x \in R\ (x \leqq x)$;

c) $\exists x\ \in R,\ \forall x \in R\ (x \geqq x)$;

d) $\forall x \in R\ (x \geqq x)$;

39. Укажите правильную запись высказывания:

«***какое бы ни было действительное число y, квадрат его не*** *отрицателен*»

a) $\forall y \in R,\ \exists y\ \in R\ (y^2 \geqq 0)$;

b) $\exists y \in R,\ \forall y \in R\ (y^2 \geqq 0)$;
c) $\forall y \in R\ (y^2 \geqq 0)$;
d) $\exists y \in R\ (y^2 \geqq 0)$;

40. Укажите правильную запись высказывания:
«*всякое натуральное число положительно*»
a) $\exists x \in N\ (x>0)$;
b) $\exists x \in N,\ \forall x \in N\ (x>0)$;
c) $\forall x \in N\ (x>0)$;
d) $\forall x \in N,\ \exists x \in N\ (x>0)$;

41. Укажите правильную запись высказывания:
«*каково бы ни было целое число y, y+0=y*»
a) $\forall y \in Z\ (y+0=y)$;
b) $\exists y \in Z,\ \forall y \in Z\ (y+0=y)$;
c) $\exists y \in Z\ (y+0=y)$;
d) $\forall y \in Z,\ \exists y \in Z\ (y+0=y)$;

42. Укажите правильную запись высказывания:
«*по крайней мере, одно число является корнем уравнения* **$x^2$-5$x$+6=0**»
a) $\exists x \in R\ (x^2-5x+6=0)$;
b) $\exists x \in Z,\ \forall x \in R\ (x^2-5x+6=0)$;
c) $\forall x \in Z\ (x^2-5x+6=0)$;
d) $\exists x \in Z\ (x^2-5x+6=0)$;

43. Укажите правильную запись высказывания:
«*всякое рациональное число, умноженное на нуль, есть нуль*»
a) $\exists x \in Q\ (x \cdot 0=0)$;
b) $\forall x \in Q,\ \exists x \in Q\ (x \cdot 0=0)$;
c) $\forall x \in Q\ (x \cdot 0=0)$;
d) $\forall x \in Z\ (x \cdot 0=0)$;

44. Укажите правильную запись высказывания:
«*найдётся рациональное число, которое больше своего квадрата*»
a) $\exists y \in Q\ (y > y^2)$;
b) $\forall y \in Q\ (y > y^2)$;
c) $\exists y \in Q,\ \forall y \in Q\ (y > y^2)$;
d) $\forall y \in Q,\ \exists y \in Q\ (y > y^2)$;

45. Укажите правильную запись высказывания:
«*модуль всякого действительного числа неотрицателен*»
a) $\forall y \in R,\ \exists y \in R\ (|y| \geqq 0)$;
b) $\exists y \in R,\ \forall y \in R\ (|y| \geqq 0)$;
c) $\forall y \in R\ (|y| \geqq 0)$;
d) $\exists y \in R\ (|y| \geqq 0)$;

46. Укажите правильную запись высказывания:
«*уравнение* **f(*x*)=0** *имеет хотя бы один действительный корень*»
a) $\forall x \in R\ (f(x)=0)$;
b) $\exists x \in R\ (f(x)=0)$;
c) $\exists x \in R,\ \forall x \in R\ (f(x)=0)$;
d) $\forall x \in R,\ \exists x \in R\ (f(x)=0)$

**Раздел 7. Ограниченно-детерминированные (автоматные) функции**

**Тема 13.** *Детерминированные функции, свойства. Примеры детерминированных и недетерминированных функций. Способ задания детерминированных функций. Вес детерминированной функции.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf Стр. 33-39.

**Тема 14.** *Ограниченно-детерминированные функции. Способы задания ограниченно-детерминированных функций: усечённое дерево, диаграмма Мура, табличный, канонические уравнения. Конечные автоматы.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf Стр. 39-48.

**Контрольные вопросы по разделу**

1. Какая функция называется детерминированной?
2. Можно ли утверждать, что детерминированная функция однозначно определяется бесконечной последовательностью функций алгебры логики?
3. Привести примеры детерминированных функций.
4. Привести примеры недетерминированных функций.
5. Что такое информационное бинарное дерево? Почему детерминированная функция однозначно задаёт некоторое информационное дерево?
6. Что называется весом детерминированной функции?
7. Ограниченно-детерминированные функции обязательно имеют конечный вес?
8. Привести пример детерминированной функции, не являющейся ограниченно детерминированной.
9. Привести пример задания ограниченно-детерминированной функции веса 2 с помощью усечённого дерева.
10. Можно ли получить диаграмму Мура из усечённого дерева?
11. Сколько столбцов и строк будет иметь таблица при табличном задании ограниченно-детерминированной функции веса 3?
12. Каким образом можно задать ограниченно-детерминированную функцию с помощью канонических уравнений?
13. Что называется конечным автоматом?
14. Верно ли утверждение, что автоматы кроме логики учитывают ещё и время?
15. Какие функции называются автоматными?
16. Как связан класс автоматных функций с классом ограниченно-детерминированных функций?

**Задачи для самостоятельной работы по разделу**

1. Выяснить, является ли функция *f:* A*→A*, которая осуществляет это отображение по следующему правилу: $x = x(1)\ldots x(k) \to y = y(1)\ldots y(k)$, при этом $y(t) = x(t)$, *где* $1\le t \le k$, детерминированной функцией (или д. функцией)?

2. Выяснить, является ли функция f: A*→A* д. функцией:

1) $y(t) = \bar{x}(t),\ 1\le t\le k;$

2) $y(1) = x(1)$

$y(2) = x(1)\&x(2)$

…

$y(t) = x(1)\&x(2)\&\ldots\&x(t)$ *для* $t$: $1\le t\le k$

3) $y(t) = x(t+1),\ 1\le t\le k-1,\ y(k) = x(1).$

3. Выяснить, является ли функция f: A*→A* о.-д. функцией, и найти её вес:

1) $y(t) = \begin{cases} 1\,при\,t = 1, \\ \bar{x}(t-1)\ при\,t \ge 2; \end{cases}$

2) $y(t) = \begin{cases} 0\,при\,t = 1, \\ x(t)\ при\,t \ge 2; \end{cases}$

3) $y(t) = \begin{cases} x(1)\,при\,t = 1, \\ \bar{y}(t-1)\ при\,t \ge 2; \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} \bar{x}(1)\,при\,t = 1, \\ 0\ при\,t \ge 2; \end{cases}$

5) $y(t) = \alpha(t)$ , где $1 \le t \le k$ , $\alpha = 101101110 \ldots 011 \ldots 10 \ldots$ .

4. Выяснить, какая из функций из задачи 2 является о.-д. функцией, и найти её вес.

5. О.-д. функции из задач 2 и 3 представить в виде усечённого дерева.

6. О.-д. функции из задач 2 и 3 представить в виде диаграммы Мура.

7. О.-д. функции из задач 2 и 3 представить в виде таблицы.

8. О.-д. функции из задач 2 и 3 представить в виде канонических уравнений.

## Раздел 8. Теория кодирования

**Тема 15.** *Алфавитное кодирование. Критерий однозначности кодирования. Алгоритм распознавания однозначности кодирования.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf Стр. 69-81.

**Тема 16.** *Самокорректирующиеся коды. Коды Хэмминга. Обнаружение ошибок в кодах Хэмминга. Декодирование.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Михеева Е.А. Введение в дискретную математику: учебное пособие. -Часть 2- Ульяновск: УлГУ, 2016. -**URL**^ ftp://10.2.96.134/Text/Miheeva2016-2.pdf Стр. 81-88.

## Контрольные вопросы по разделу

1. Нарисовать схему канала связи.
2. Что такое алфавитное кодирование?
3. Всегда ли возможно однозначное декодирование при передаче без ошибок?
4. Что называют суффиксом и префиксом слова?
5. Сформулируйте теорему Маркова об однозначности алфавитного кодирования.
6. Как можно интерпретировать алгоритм распознавания однозначности лекодирования на языке графов?
7. Что такое равномерное кодирование?
8. Каким свойством обладают самокорректирующиеся коды?
9. Какими свойствами обладают информационные и проверочные символы в коде Хэмминга?
10. Как происходит обнаружение ошибок в коде Хэмминга?
11. Опишите алгоритм декодирования кода Хэмминга по проверочной матрице.
12. Возможно ли построение не бинарных кодов Хэмминга?

## Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Является ли код $C$ с кодирующим алфавитом $\{0,1,2\}$ однозначно декодируемым? Найти неоднозначно декодируемое слово.

$$C = \{01, 201, 112, 122, 0112, 011\}.$$

2. Является ли код $C$ с кодирующим алфавитом $\{0,1,2\}$ однозначно декодируемым? Найти неоднозначно декодируемое слово.

$$C = \{01, 12, 012, 111, 0102, 10112, 01112\}.$$

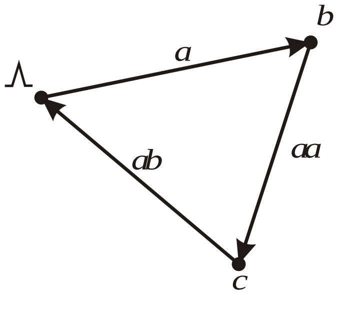
3. Построить по методу Хэмминга кодовое слово $\tilde{\beta}$ для сообщения $\tilde{\alpha}$ =1100.

4. По каналу связи передавалось кодовое слово $\tilde{\beta}$, построенное по методу Хэмминга для сообщения $\tilde{\alpha}$. После передачи по каналу связи, искажающему слово не более чем в одном разряде, было получено слово $\tilde{\beta}'$ =0101100. Восстановить исходное сообщение $\tilde{\alpha}$.

Пример решения. Задача 5

Является ли код С($\Sigma$ )={*a*, *ab*,*cab*, *baac*} однозначно декодируемым. Найти неоднозначно декодируемое слово.

*Решение*: Находим множество S={Λ, b, c}. Коду С($\Sigma$) сопоставим ориентированный граф $\Gamma'(\Sigma)$:




*B=abaacab* – неоднозначно декодируемое слово.

*Вывод*: код С($\Sigma$) не является однозначно декодируемым, так как граф схемы $\Gamma'(\Sigma)$ содержит ориентированный цикл, проходящий через вершину $\Lambda$. Слово В – неоднозначно декодируемое слово, так как имеет две расшифровки.

Пусть $\{A_1, \ldots, A_s\}$ – некоторое подмножество попарно различных слов в алфавите $U$, имеющих одинаковую длину m. Предположим, что в канале связи действует источник помех, который в словах из $\{A_1, \ldots, A_s\}$, имеющих длину m, может выдавать ошибки не более чем в $p$ символах. Совершенно ясно, что если передавать исходное сообщение $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (без предварительного кодирования), то на выходе канала невозможно будет установить, какое сообщение фактически было передано. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли осуществить кодирование слов А из множества $\{A_1, \ldots, A_s\}$, то есть слов вида $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ словами $\beta_1 \ldots \beta_l$ длины $l$ так, чтобы по коду $\beta'_1 \ldots \beta'_l$, полученному на выходе канала при передаче кода $\beta_1 \ldots \beta_l$, можно было однозначно восстановить этот код, и, значит, исходное сообщение $\alpha_1 \ldots \alpha_m$? Коды, обладающие данным свойством, будем называть самокорректирующимися кодами относительно рассматриваемого источника помех.

Корректное построение самокорректирующихся кодов было осуществлено Хэммингом (1950), им подробно был разобран случай p=1.

Пример решения. Задача 6

По каналу связи передавалось кодовое слово $\tilde{\beta}$, построенное по методу Хэмминга для сообщения $\tilde{\alpha}$. После передачи по каналу связи, искажающему слово не более чем в одном разряде, было получено слово $\tilde{\beta}' = (1001110)$. Восстановить исходное сообщение $\tilde{\alpha}$.

*Решение*: Имеем $l = 7$, $m = \log_2\left(\frac{2^7}{8}\right) = 4$, тогда $k = l - m = 7 - 4 = 3$. Вычислим вектор $\bar{r} = (r_0, r_1, r_2)$. Имеем

$$r_0 = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_7 = 1 + 0 + 1 + 0 = 0 \ ,$$
$$r_1 = \beta_2 + \beta_3 + \beta_6 + \beta_7 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1 \ ,$$
$$r_2 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = 1 + 1 + 1 + 0 = 1 \ .$$

Отсюда получаем, что $r(\bar{r}) = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$. Следовательно, ошибка произошла в шестом разряде. Тогда неискажаемое кодовое слово имеет вид $\tilde{\beta} = (1001100)$. Вычёркивая контрольные разряды с номерами 1, 2, 4, получаем исходное сообщение $\tilde{\alpha} = (0100)$. При решении задачи использовался алгоритм обнаружения ошибки в кодах Хэмминга.

*Вывод*: исходное сообщение $\tilde{\alpha} = (0100)$.